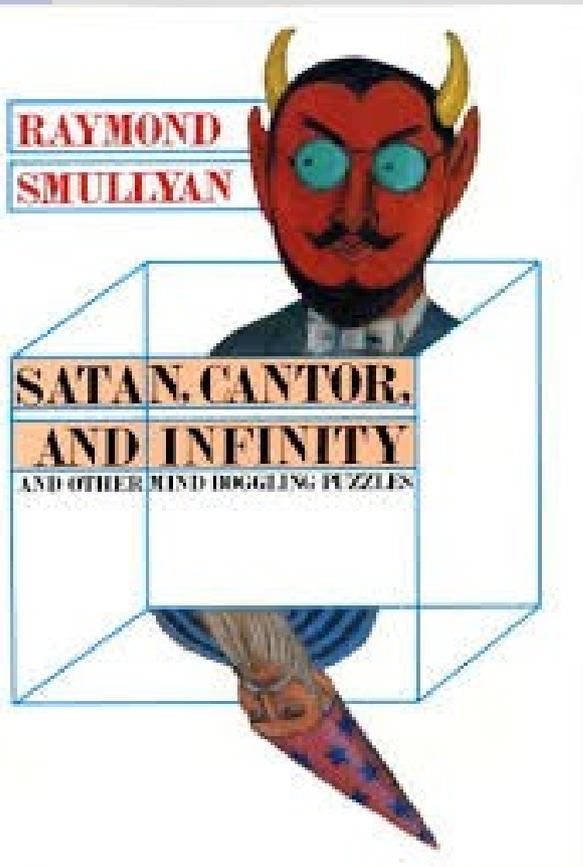


Satana, Cantor e l'Infinito



Alberto Saracco

**Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e
Informatiche
Università di Parma**

<http://www2.unipr.it/~saralb74/divulgazione/>

**Pisa, Fibonacci di, 23 novembre 2019, ore 11
Orto botanico**

I numeri

- ✓ I numeri sono un'astrazione



Calcoli: corrispondenza biunivoca



$$1 \leftrightarrow 1$$

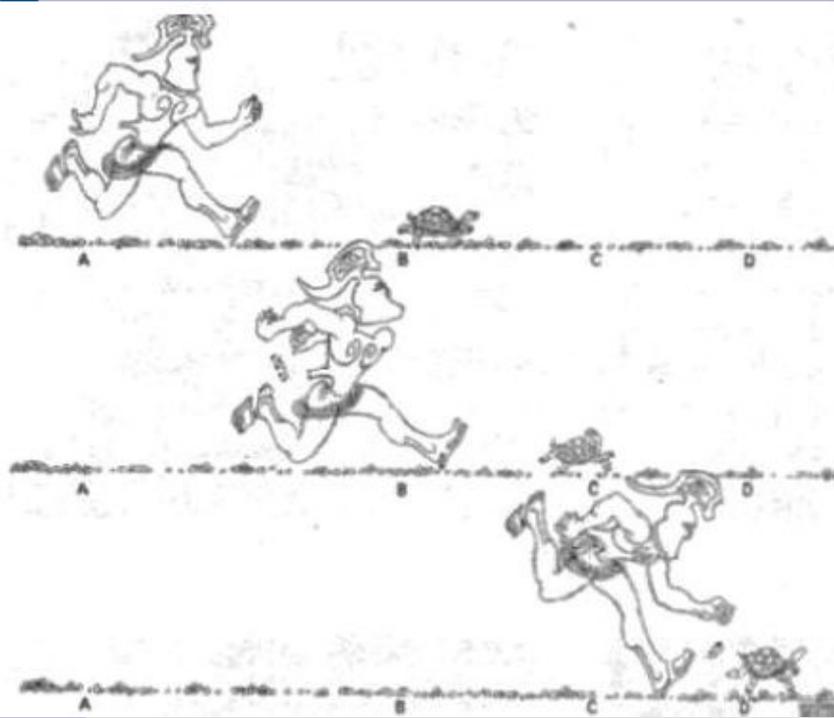


N: i numeri naturali

1889 – Giuseppe Peano

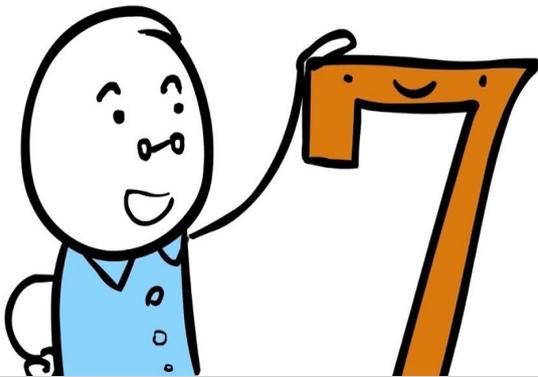
Frege - Russell

Infinito VS Finito

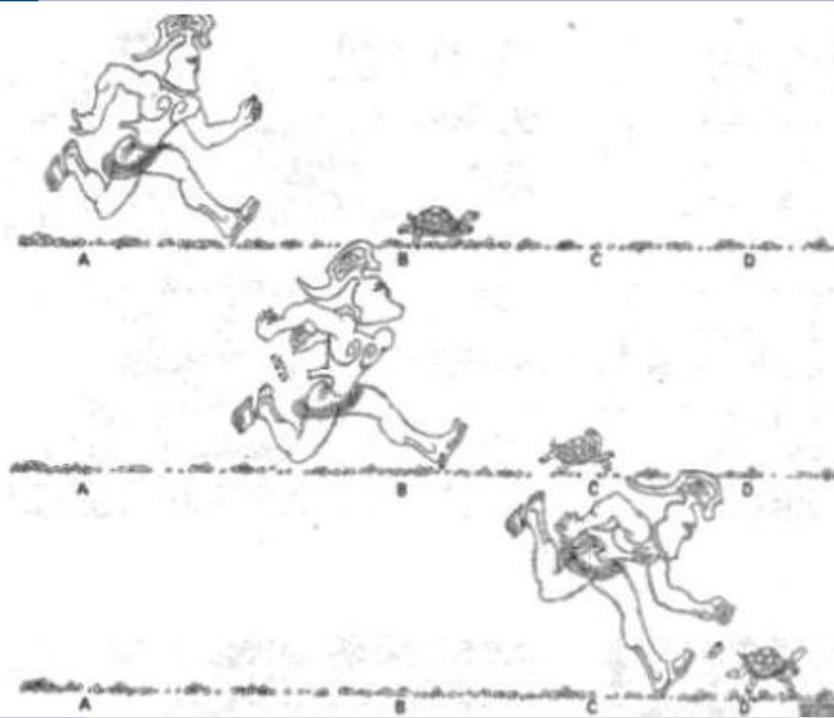


Sette è LA MISURA
MASSIMADI TUTTO

DOT
TOR

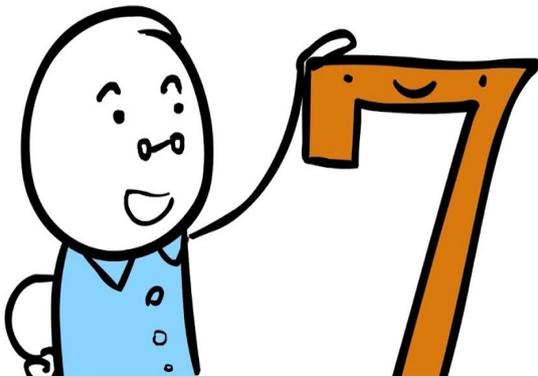


Infinito VS Finito



Sette è LA MISURA
MASSIMADI TUTTO

DOT
TOR



Piu' uno

(di Gianni Rodari)

C'era una volta un tale
che voleva trovare
il numero più grande del mondo.
Comincia a contare
e mai si stanca:
gli viene la barba grigia,
gli viene la barba bianca,
ma lui conta, conta sempre
milioni di milioni
di miliardi di miliardi
di strabilioni
di meraviglioni
di meravigliardi...
In punto di morte
scrive un numero lungo
dalla Terra a Nettuno.
Ma un bimbo gridò - Più uno!
E il grande calcolatore
ammise, un poco triste,
che il numero più grande
del mondo non esiste



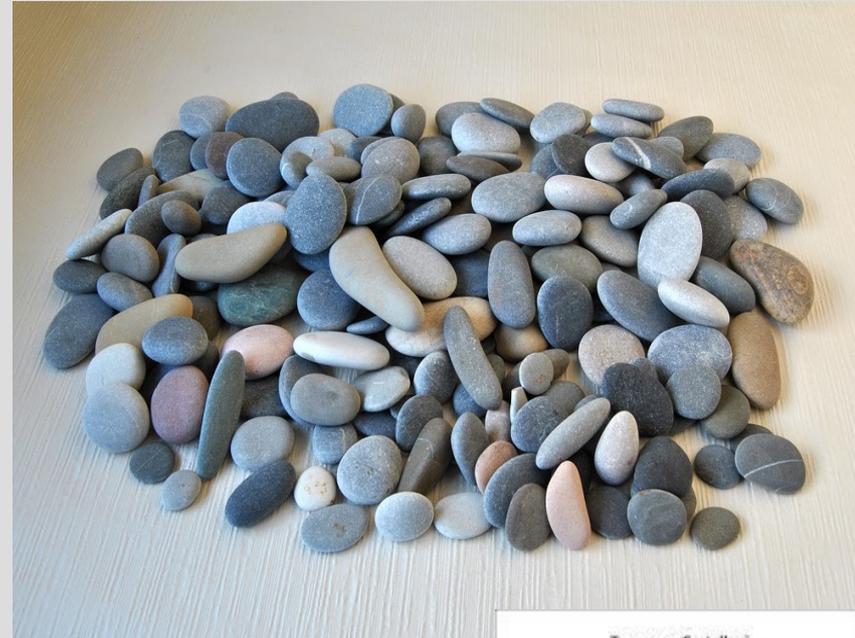
www.favolefantasia.com



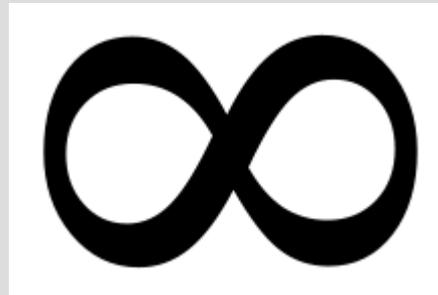
L'infinito

- **FINITO**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



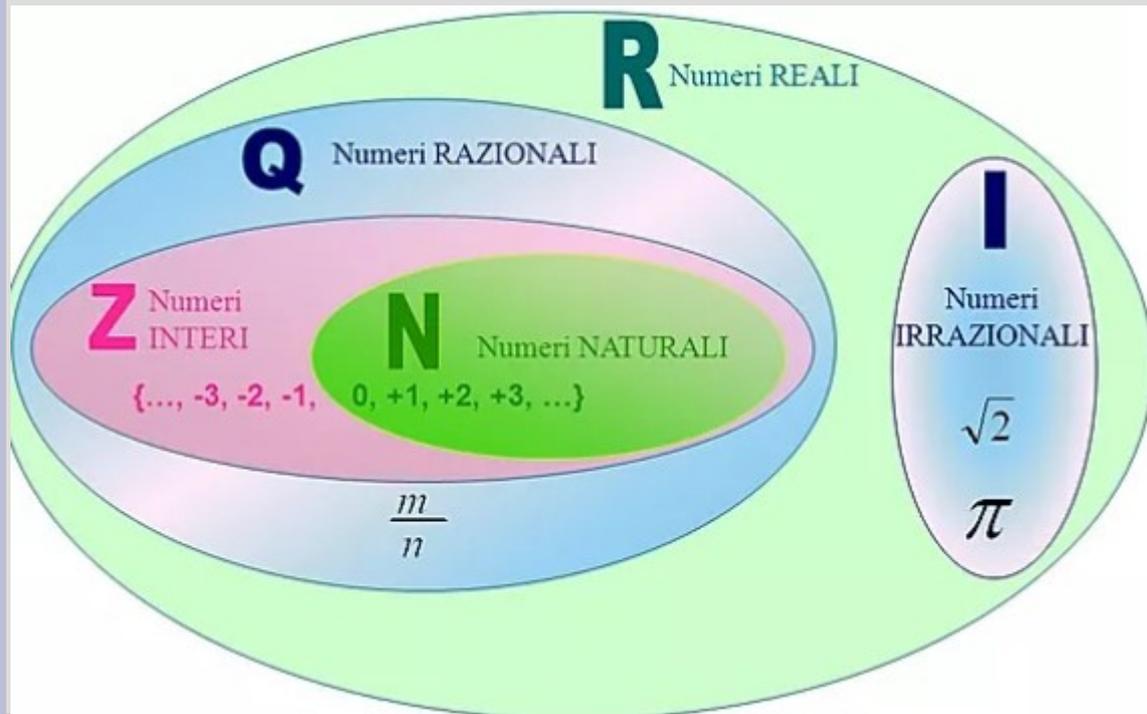
- **INFINITO**



Un insieme infinito: N

i

N è finito?



Hilbert's Hotel



L'albergo di Hilbert è un albergo infinito. Le camere sono numerate con \mathbb{N} .

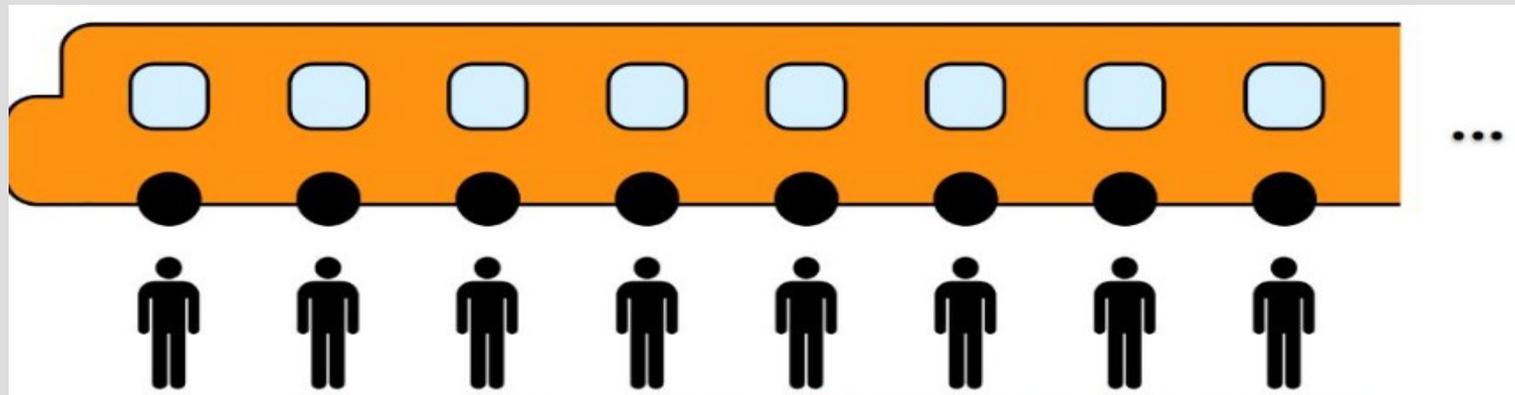
L'albergo è pieno.
Arriva un ospite.
Cosa si fa?



Gli si fa spazio!

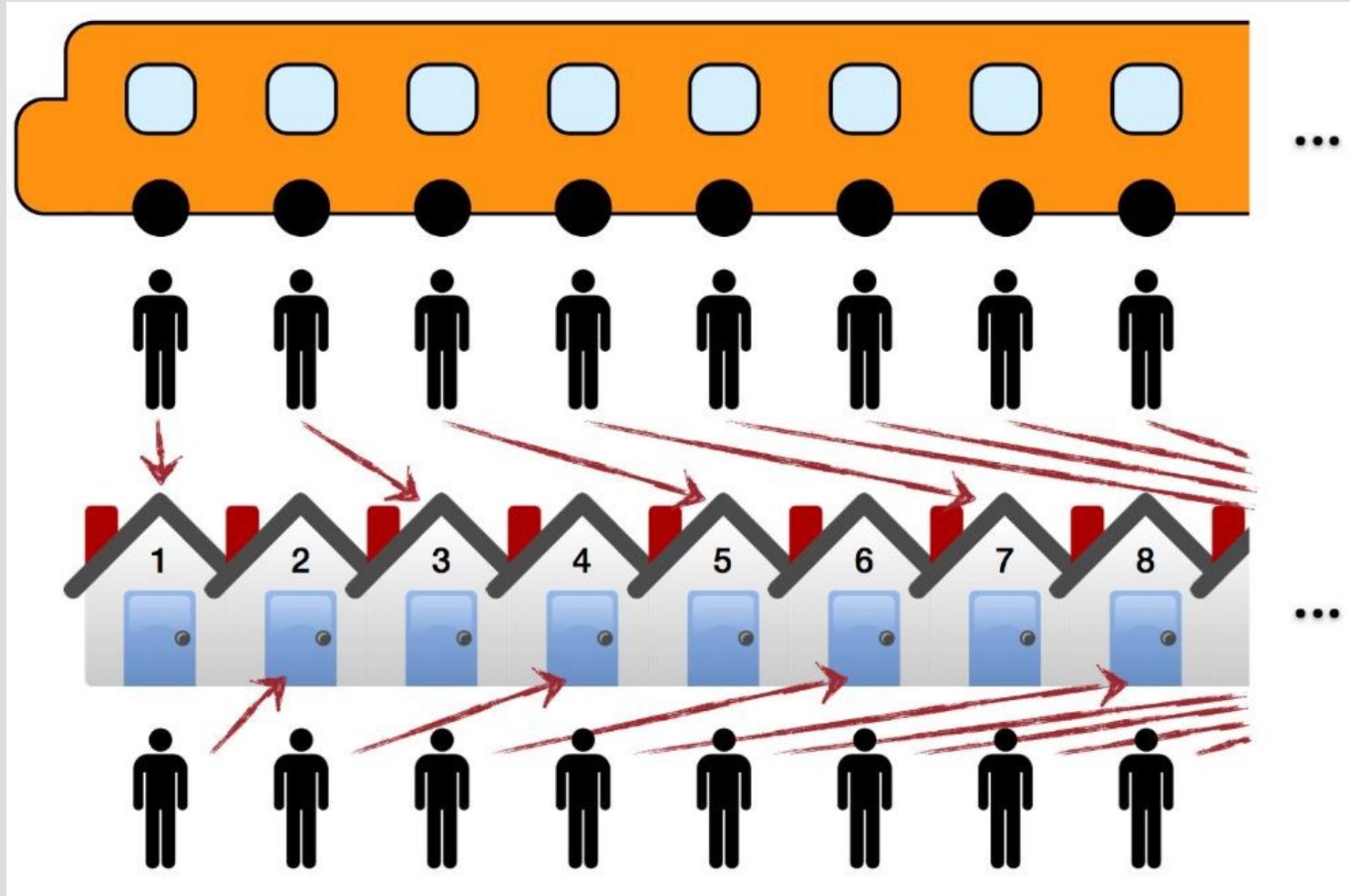
-
-
- $n \rightarrow n+1$
-
-

Ma ora arriva un
pullman infinito!



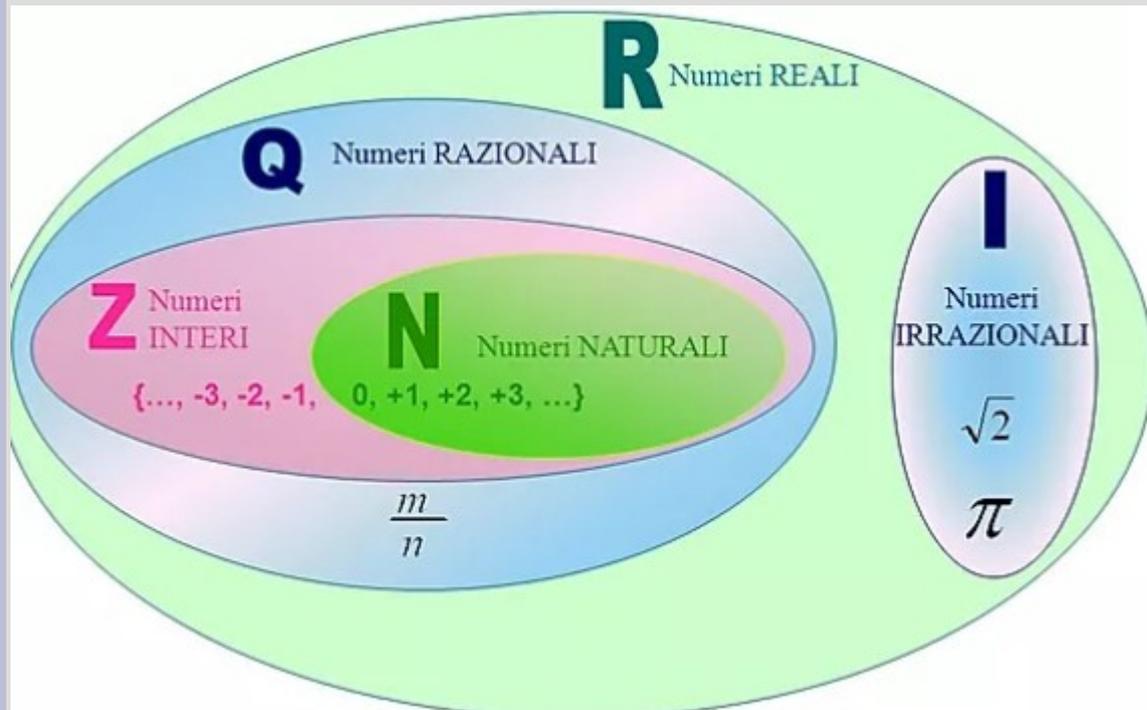
Avanti, c'è posto!

$n \rightarrow 2n$



$$|N| = |Z|$$

- **N** è l'albergo
- **Z** l'albergo + il pullman
(i posti sono numerati $-1, -2, -3, \dots$)



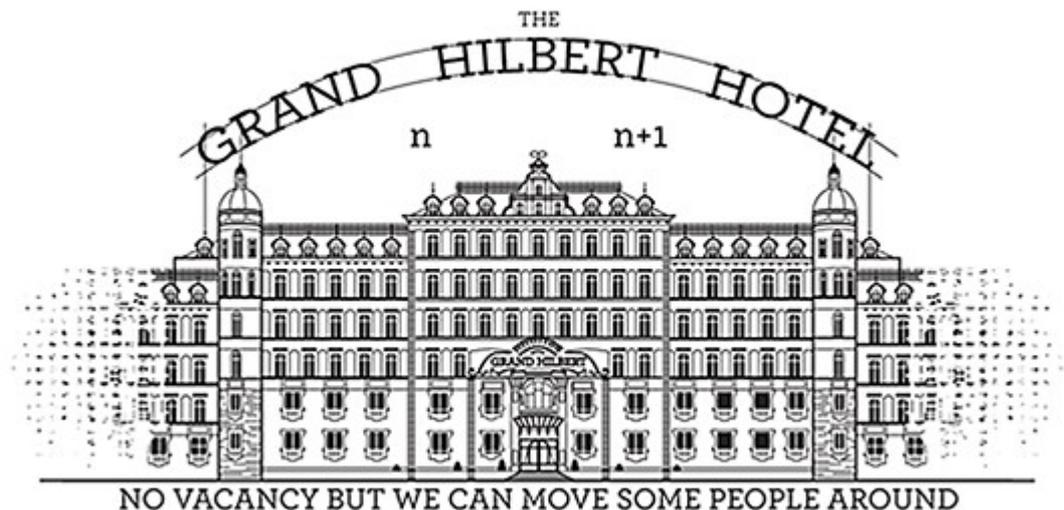
Arrivano ora infiniti
pullman infiniti
Che fare?

Avanti, c'è posto!

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(1)	1^*1	1^*2	1^*3	1^*4	1^*5	1^*6	1^*7	$1^*8...$
(2)	2^*1	2^*2	2^*3	2^*4	2^*5	2^*6	2^*7
(3)	3^*1	3^*2	3^*3	3^*4	3^*5	3^*6
(4)	4^*1	4^*2	4^*3	4^*4	4^*5			
(5)	5^*1	5^*2	5^*3	5^*4				
(6)	6^*1	6^*2	6^*3				
(7)	7^*1	7^*2				

Stanislaw Lem

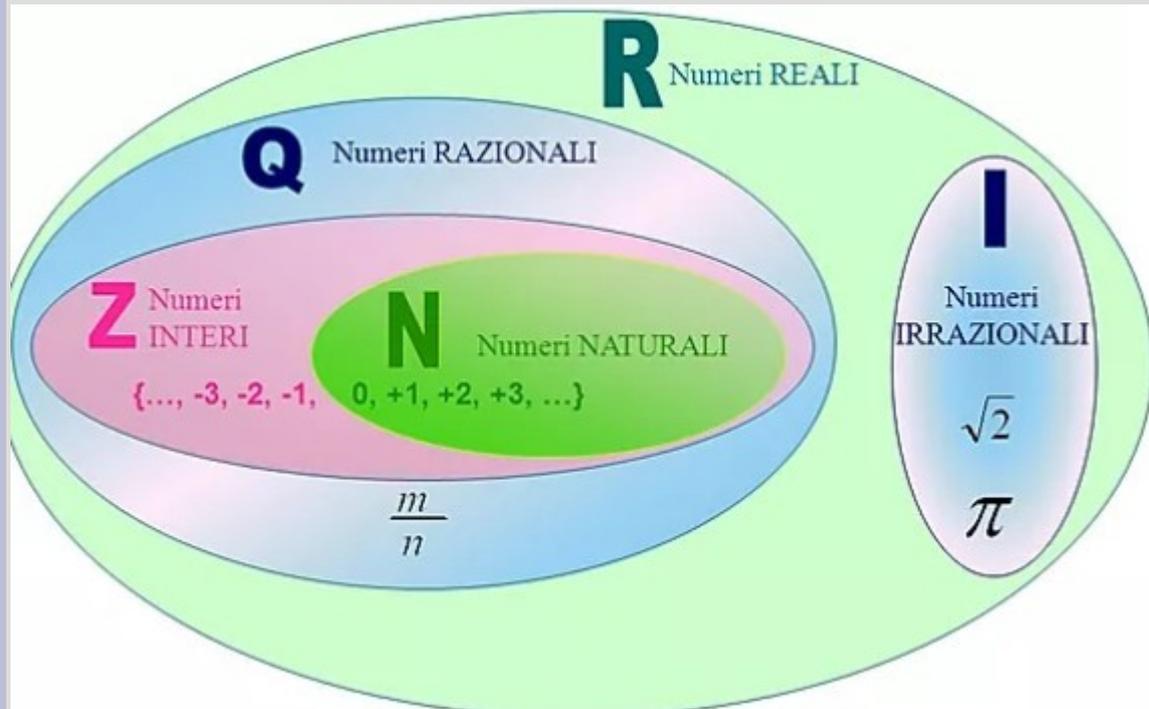
L'hotel
straordinario



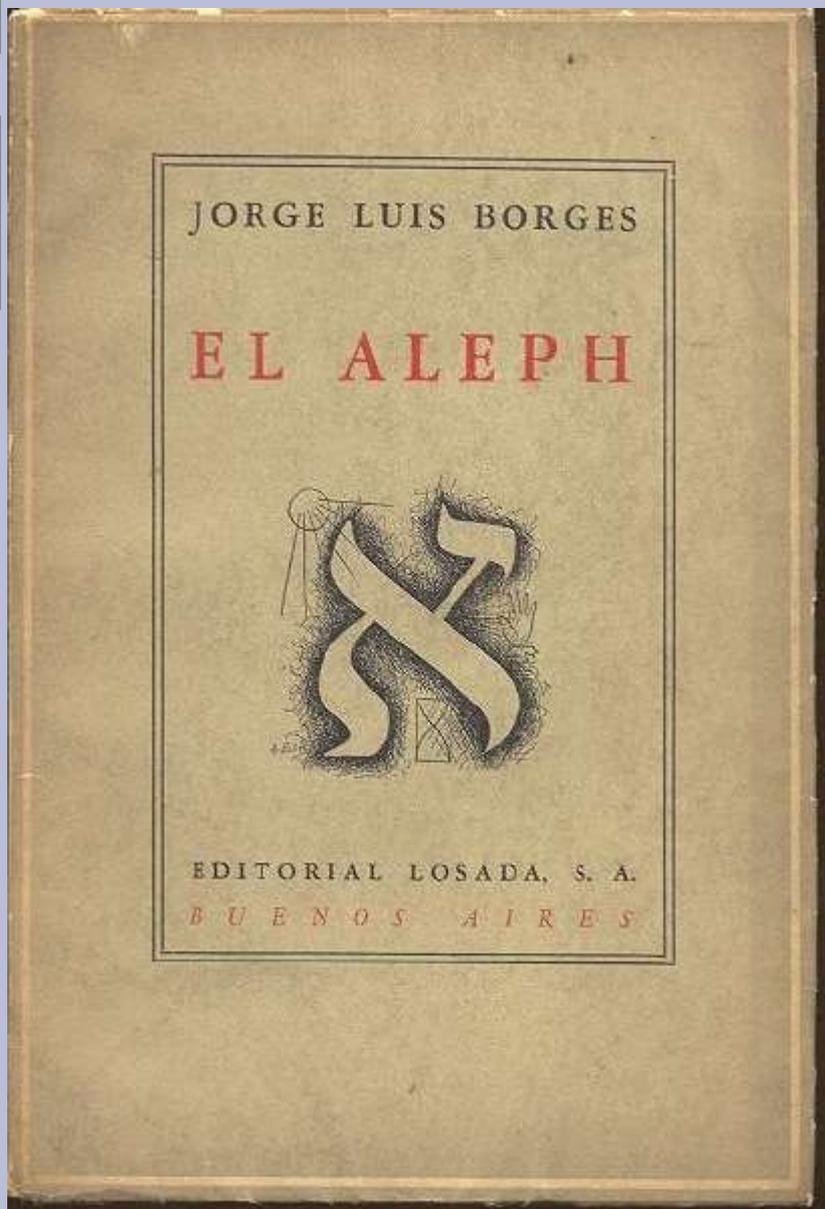
$$|Q| = |N|$$

N è l'albergo

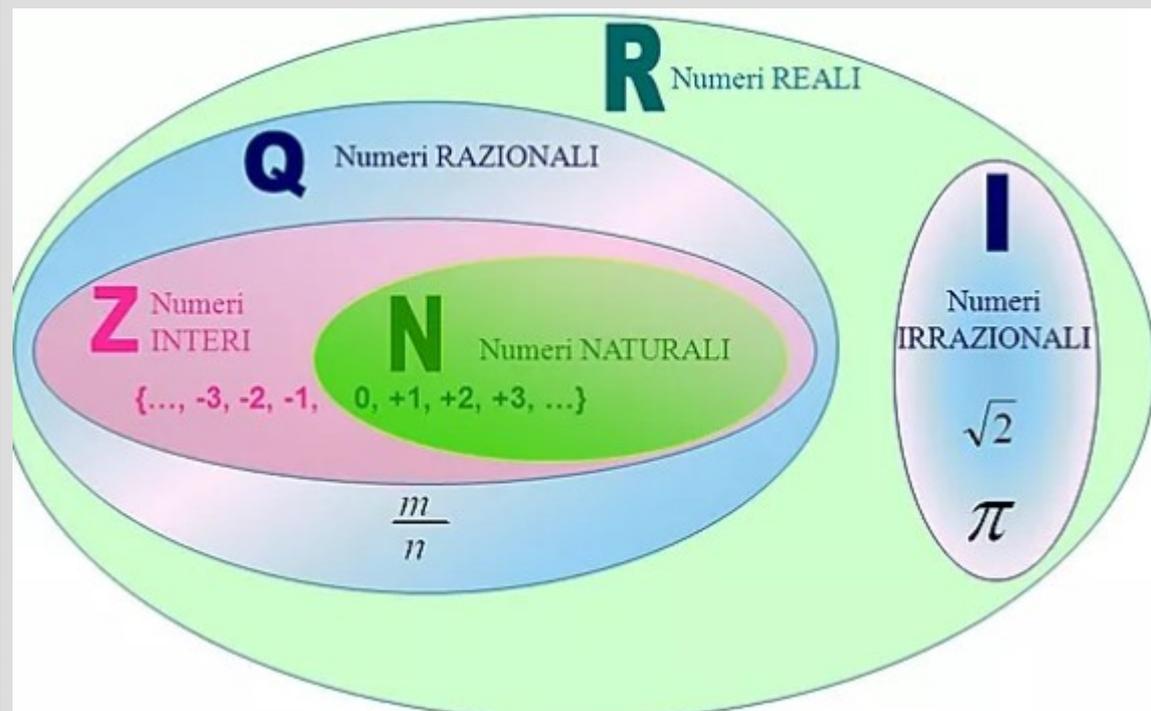
Q sono i pullman



Tutti gli insiemi infiniti hanno la cardinalità di \aleph_0 ?



\aleph_0 è l'insieme infinito più piccolo



Il club delle Galassie

- Tanto tempo fa, in una galassia lontana lontana...
- Tutti gli abitanti sono organizzati in club.
- Ogni sottoinsieme degli alieni forma un club, e non ci sono due club uguali.
- I club sono ognuno intitolato ad un alieno



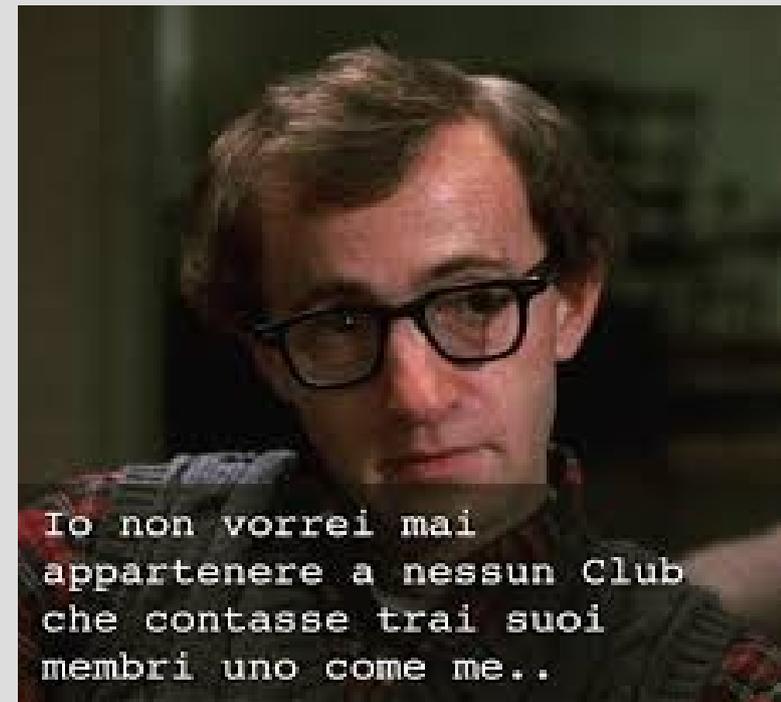
Se gli alieni sono in numero finito è impossibile.

Ma se sono in numero infinito?

Il club degli asociali

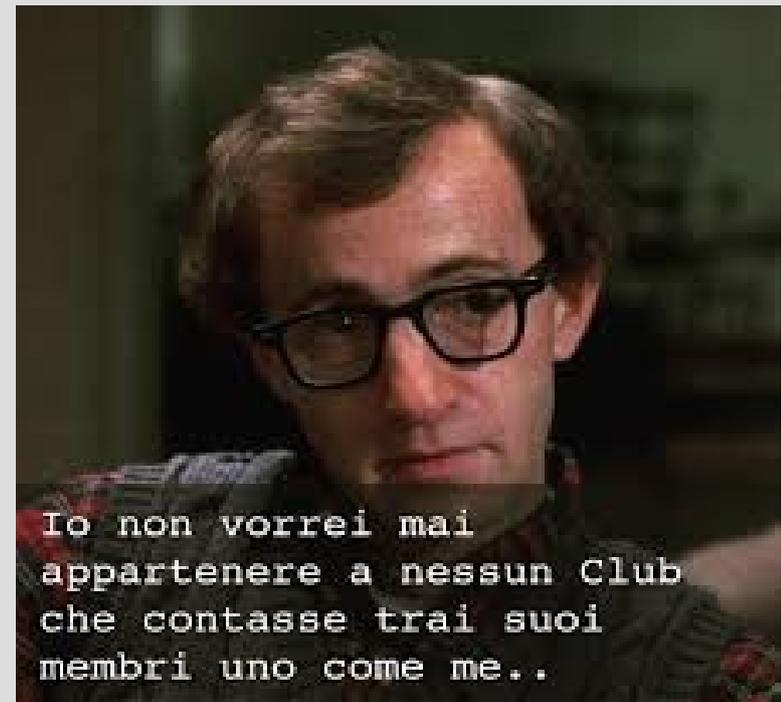
- Chiamiamo **socievole** un alieno che fa parte del club a lui intitolato e **asociale** un alieno che non fa parte del club a lui intitolato.
- Consideriamo ora il club degli asociali, composto da tutti e soli gli alieni asociali. A chi è intitolato?

-



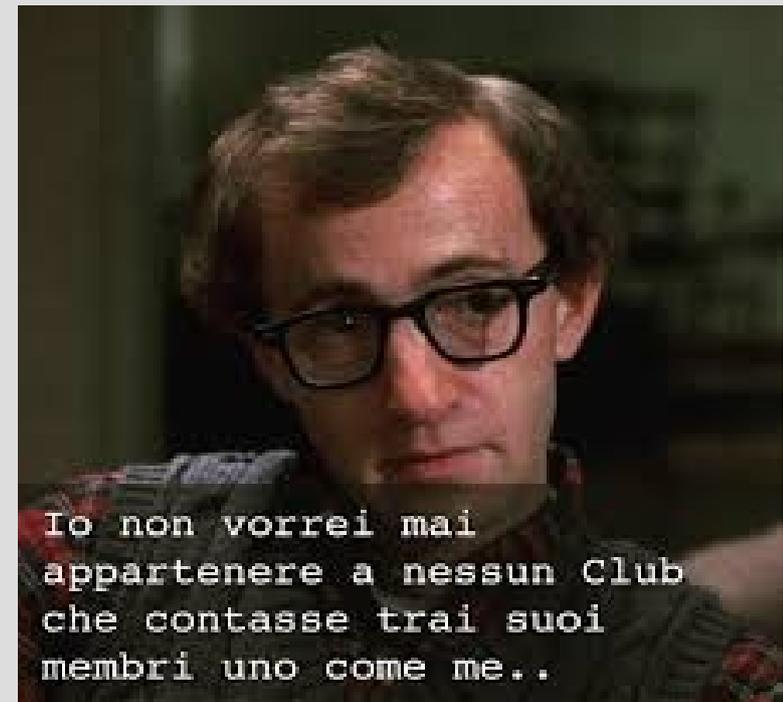
Il club degli asociali

- Chiamiamo **socievole** un alieno che fa parte del club a lui intitolato e **asociale** un alieno che non fa parte del club a lui intitolato.
- Consideriamo ora il club degli asociali, composto da tutti e soli gli alieni asociali. A chi è intitolato?
- Non può essere intitolato ad un alieno asociale (altrimenti sarebbe socievole)



Il club degli asociali

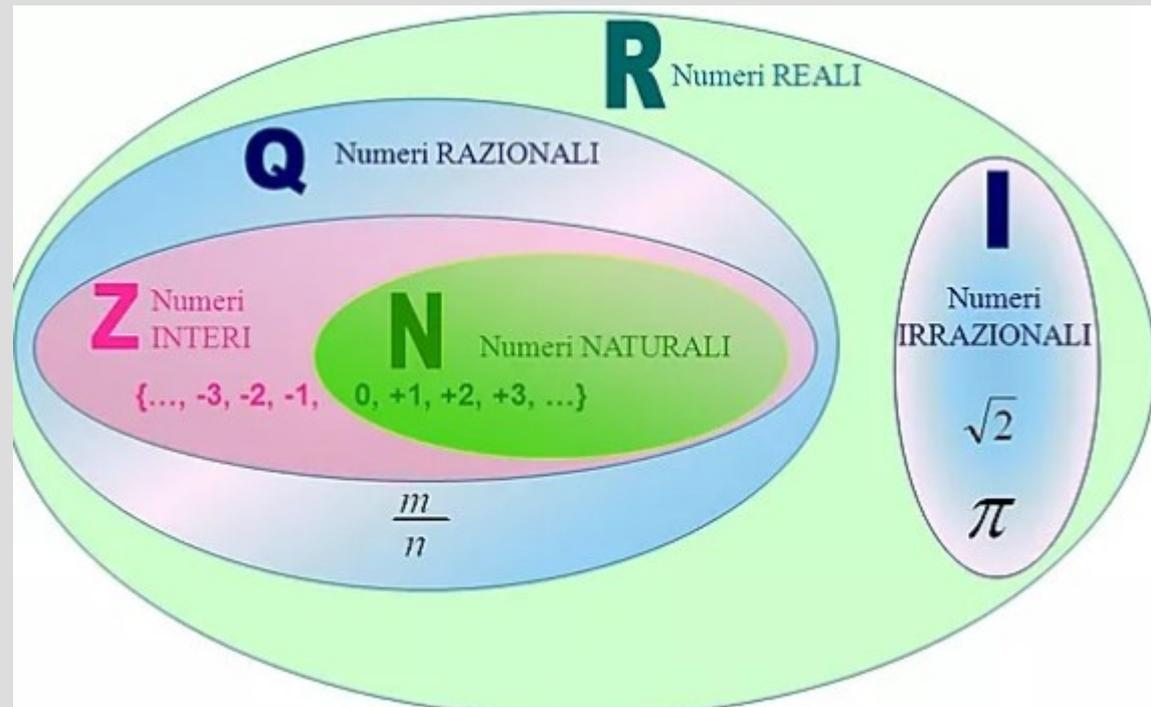
- Chiamiamo **socievole** un alieno che fa parte del club a lui intitolato e **asociale** un alieno che non fa parte del club a lui intitolato.
- Consideriamo ora il club degli asociali, composto da tutti e soli gli alieni asociali. A chi è intitolato?
- Non può essere intitolato ad un alieno asociale (altrimenti sarebbe socievole)
- Non può essere intitolato ad un alieno socievole (altrimenti sarebbe asociale)
- **ASSURDO!**



Diversi infiniti!

- Ci sono quindi diversi infiniti. Abbiamo appena dimostrato che
- L'insieme delle parti di un insieme è più grande dell'insieme stesso!

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

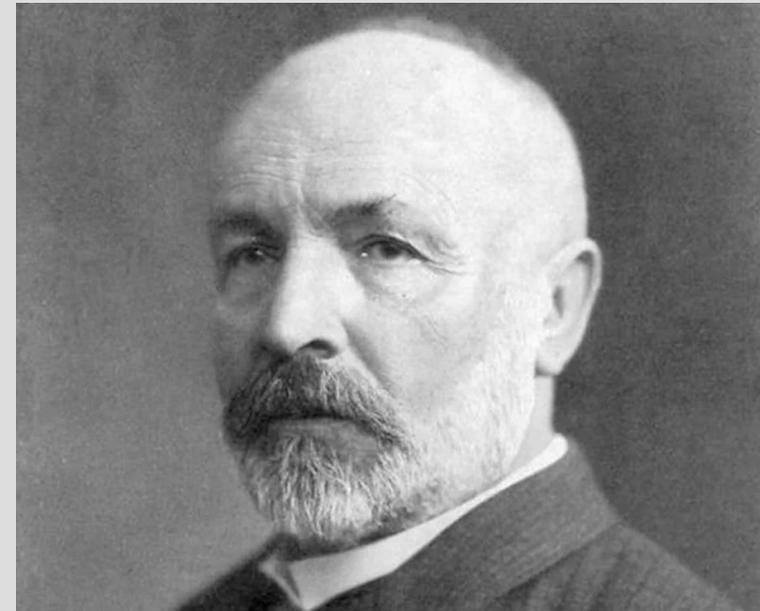


E i numeri reali?

Arriva Cantor!

- Immaginiamo di aver elencato tutti i numeri reali, scritti nella loro espressione decimale...

X1	=	0,	0	6	8	7	2	0	1	5	8	...
X2	=	0,	5	4	3	4	3	5	7	8	2	...
X3	=	0,	3	5	2	3	2	7	8	5	5	...
X4	=	0,	8	0	0	2	7	3	4	3	7	...
X5	=	0,	7	5	1	2	5	2	6	3	6	...
X6	=	0,	7	4	4	8	6	4	3	7	2	...
X7	=	0,	3	7	4	3	0	0	6	3	6	...
X8	=	0,	0	0	3	0	6	6	4	2	0	...
X9	=	0,	7	3	0	8	2	2	0	6	6	...
Y	=	0,	1	5	3	3	6	5	7	3	7	...



Satana, Cantor e l'Infinito



